

Ohne Zweifel war es eine sehr grosse Mühe, die Beiträge der 80 Mitarbeiter aufeinander abzustimmen und dabei auch das wirklich Wesentliche hervorheben zu lassen. Vieles oder sehr wahrscheinlich das meiste aus dem heute so weitschichtigen Gebiet der Physik und aller angrenzenden Wissenschaften ist sehr klar dargelegt. Einige Artikel bestechen durch ihre hervorragende Prägnanz. Dem Referenten fällt es indessen auf, dass manches vielleicht zu ausführlich gegenüber anderen, heute wohl aktuelleren Dingen behandelt worden ist (Beispiel: Foucaultscher Pendelversuch). Es wundert den Referenten auch, dass gelegentlich Literatur zitiert worden ist, die heute eher als etwas überholt angesehen werden darf. Der Leser wird neueste Monographien oder zusammenfassende Darstellungen suchen. (Beispiel: Unter «Magnetochemie» ist das Buch von P. W. SELWOOD «Magnetochemistry» [1943] nicht erwähnt worden.) Der Referent ist weiterhin beim Durchblättern auf einige Unstimmigkeiten usw. gestossen: Die Haidingerschen Polarisationsbüschel (Seite 521, Teil I) sieht man natürlich nicht nur am blauen Himmel. Die bläulichen Garben entsprechen überdies der konventionellen Schwingungsebene und nicht der Polarisationsebene. Vom Stichwort «Föhn» (Seite 422, Teil I) wird auf «Wetterfähigkeit» verwiesen. Dieses Wort wird man aber vergeblich suchen. Die Anisotropie der Wärmeleitung in Kristallen ist, soweit ersichtlich, nirgends erwähnt worden. Die Abbildungen 4a und b beim Foucaultschen Pendelversuch (Seite 426, Teil I) sind vertauscht worden. Die Relativbewegung bei stossfreiem Loslassen des Pendels ist dementsprechend im Text nicht richtig dargestellt worden. Verwechselt wurden auch auf Seite 745 von Teil I die Zeichnungen des kubischen und des tetragonalen Koordinatensystems. Im Zusammenhang mit der Beschreibung der Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops (Seite 56, Teil II) wird auf «Ultramikroskopie» hingewiesen. Es muss richtig heißen: «Ultraviolett-mikroskopie». Unter «Ultramikroskop» (Seite 584, Teil II) wird behauptet, man könnte in Metallsolen noch Teilchen von  $0,01 \text{ m}\mu$  Durchmesser (das heisst also von  $0,1 \text{ Å}$ ) wahrnehmen. Die kleinsten Goldteilchen, die man sehen kann, sind etwa  $100 \text{ Å}$  gross. Die Grenze wäre also richtig mit  $0,01 \mu$  anzugeben. Strömungsdoppelbrechung sollen (Seite 493, Teil II) organische Flüssigkeiten zeigen. Die klassischen Untersuchungen von FREUNDLICH am  $\text{V}_2\text{O}_5$ -Sol wären nach Ansicht des Referenten zu berücksichtigen gewesen. Das Material für die Polarisationsfolien heisst nicht «Heraphit» (Seite 545, Teil I), sondern «Herapathit»<sup>1</sup>. Im periodischen System der Elemente (Seite 777, Teil II) sind Kalium und Aluminium unrichtig bezeichnet, nämlich als «Ka» und «A». Unter den Physikern hätte J. BALMER eine Erwähnung sicher verdient.

In einem derartig umfangreichen Wörterbuch sind natürlich gewisse Unstimmigkeiten nie zu vermeiden. Die angeführten Fehler werden aber, wenigstens teilweise, nicht als belanglos anzusehen sein. Der Referent wird sich mit Recht fragen dürfen, ob nicht auch an anderen Stellen Unrichtiges zu finden sein wird. Bei einer Neuauflage wird wohl eine genaue Revision zweckdienlich sein. Vielleicht darf der Referent in diesem Zusammenhang anregen, dass unter jedem Artikel auch der Verfasser mit Anfangsbuchstaben angegeben wird.

Nach all diesen kritischen Bemerkungen soll aber betont werden, dass es sich bei diesem Buch nicht nur um ein sehr nützliches, sondern auch um ein überaus aufschlussreiches, zu einer weiteren Lektüre anregendes Nachschlagewerk handelt.

G. BOEHM

<sup>1</sup> Nach dem Entdecker W. B. HERAPATH.

## Informations - Informationen - Informazioni - Notes

### STUDIORUM PROGRESSUS

#### Beitrag zu einem Extremalproblem über konvexe Rotationskörper

Von H. BIERI\*

I. Die fundamentale Rolle der drei Masszahlen  $V$ ,  $F$ ,  $M$  in der Theorie der konvexen Körper, insbesondere also auch in der *Theorie der konvexen Rotationskörper*, ist des öfters beleuchtet worden<sup>1</sup>. Von besonderem Interesse ist das Problem, bei zwei festgehaltenen Masszahlen die Extrema der dritten aufzusuchen und die zugehörigen Extremalkörper anzugeben.

Infolge unvorhergesehener Schwierigkeiten<sup>2</sup> empfiehlt es sich, dem Problem folgende Wendung zu geben:

\* Bern.

<sup>1</sup> H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper*, 3. Kapitel (Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955).

<sup>2</sup> H. HADWIGER und H. BIERI, Math. Nachr. 13, 19 (1955).

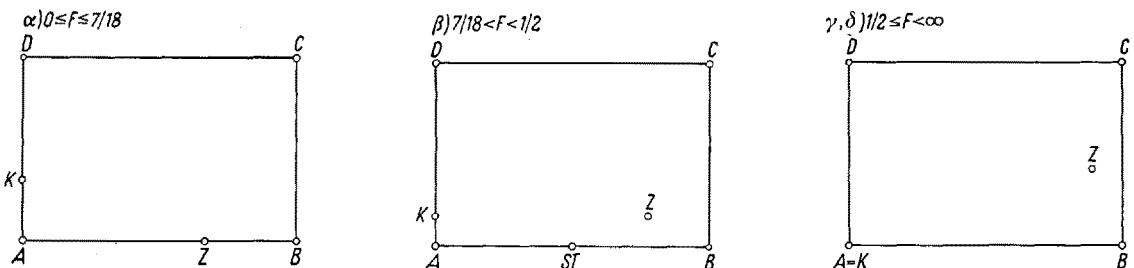
#### Vermittelst zweier der drei Koordinaten

$$x = \frac{4 \pi F}{M^2}, \quad y = \frac{48 \pi^2 V}{M^3}, \quad z = \frac{36 \pi V^2}{F^3} \quad (1)$$

wird die Menge aller konvexen Rotationskörper auf eine Ebene abgebildet. Gesucht wird der Rand des Bildes.

Ist dieser Rand einmal bekannt, so können ohne Mühe die Eigenschaften der Extremalkörper bezüglich der Masszahlen abgelesen werden. In der vorliegenden Note wird ein bis jetzt unbekanntes Randstück aufgezeigt, und als neue Extremalkörper werden Kegel erkannt, deren Öffnungswinkel einem angebbaren abgeschlossenen Intervall  $\psi_3 \leq \psi \leq \psi_4$  angehören.

II. Es ist schwierig, das Problem direkt anzupacken, bedeutet dies doch, einen Körper so zu deformieren, dass zwei Masszahlen konstant bleiben. So wurde denn indirekt vorgegangen. Nur eine Masszahl blieb fest, und die Extrema der beiden andern wurden zu bestimmen gesucht. Bei festem Äquatorradius war es überdies möglich, Ungleichungen aufzufinden, die alle drei Mass-

Abb. 1. --- Kegelstumpfkurve.  $K$  Bildpunkt des Kegels.  $Z$  Bildpunkt des Zylinders.  $ST$  Bildpunkt des speziellen Kegelstumpfes.

zahlen enthalten<sup>3</sup>. Dieser Umstand ist denn auch am vorliegenden Teilerfolg massgebend beteiligt.

A. Wir betrachten zunächst die Menge aller konvexen Rotationskörper der festen Länge  $l = 1$ <sup>4</sup> und geben uns die reduzierte Oberfläche  $F$  vor, wobei  $F^* = \pi F$  gesetzt werde. Es gilt:

- a)  $\alpha)$  Im Intervall  $0 \leq F \leq 7/18$  besitzen *Zylinder* und nur diese Körper kleinstes Volumen  $v$ .
- $\beta)$  Im Intervall  $7/18 < F < 1/2$  besitzen *spezielle Kegelstumpfe*<sup>5</sup> und nur sie kleinste Volumen  $v$ . (2)
- $\gamma)$  Im Intervall  $1/2 \leq F < \infty$  besitzen *Kegel* und nur diese Körper kleinste Volumen  $v$ .
- b) Im Intervall  $0 \leq F < \infty$  besitzen *Kegel* und nur diese Körper das grösste Integral der mittlern Krümmung  $M^6$ .
- c)  $\alpha)$  Im Intervall  $0 \leq F \leq 1$  sind die Extremalkörper, welche grösstes Volumen  $V$  besitzen, noch unbekannt<sup>7</sup>. Doch erhält man folgendermassen eine obere Schranke  $\bar{V}$ : Bei festem  $F$  weist der *symmetrische Doppelkegel* den grössten Äquatorradius auf. Der diesem Körper *umbeschriebene Zylinder* liefert  $\bar{V}$ .
- $\beta)$  Im Intervall  $1 \leq F < \infty$  sind die Extremalkörper mit grösstem Volumen unter den *Nodoiden* zu suchen<sup>8</sup>. Nun besitzt das *Nodoid ohne Kanten* den grössten Äquatorradius, und der diesem Körper *umbeschriebene Zylinder* liefert  $\bar{V}$ .
- d) Die Extremalkörper, welche das kleinste Integral der mittlern Krümmung aufweisen, sind noch unbekannt<sup>9</sup>. Doch erhält man folgendermassen eine untere Schranke  $M$ : Bei festem  $F$  besitzt der *Zylinder* den *kleinsten Äquatorradius*. Der diesem Körper *einbeschriebene symmetrische Doppelkegel* liefert  $M$ .

Gestützt auf (1) und (2) kann man nun für festes  $F$  in einer  $(x, z)$ -Ebene *rechteckige Bereiche mit achsenparallelen Seiten* angeben, welche die Bildpunktmenge der zulässigen Körper überdecken (Abb. 1).

Unsere Bereiche sind nach oben und nach rechts sehr unscharf begrenzt. Dieser unbestreitbare Nachteil wird

<sup>3</sup> H. HADWIGER, Math. Nachr. 2, 114 (1949).

<sup>4</sup> Die Beschränkung von  $l$  bedeutet hier keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit, da ja eine Aussage über die Bildpunktmenge geplant ist und die Abbildungsfunktionen (1) invariant gegenüber Ähnlichkeit sind.

<sup>5</sup> H. BIERI, Exper. 6, 222 (1950).

<sup>6</sup> H. BIERI, Exper. 9, 207 (1953); 12, 369 (1956); 13, 389 (1957).

<sup>7</sup> Vermutlich sind es Kappenkörper der Kugel.

<sup>8</sup> Vgl. hierzu die Dissertationen von G. HORMANN (Göttingen 1887) und W. HOWE (Berlin 1887).

<sup>9</sup> Einen günstigen Effekt zeigen die Verlängerungskörper der symmetrischen Kugellinsen (Zylinder + 2 kongruente Kugelkalotten) sowie die symmetrischen Kugelschichten.

aufgewogen durch den Umstand, dass im dritten Bereich die Ecke links unten durch einen konvexen Rotationskörper besetzt ist. Wir haben nun die Vereinigungsmenge aller Rechteckbereiche zu studieren. Eingehende Diskussion ergibt folgendes (Abb. 2):

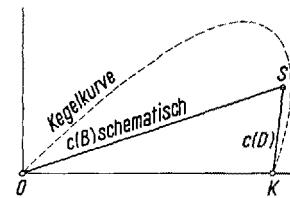


Abb. 2

$\alpha, \beta)$  Durchläuft  $F$  das Intervall  $0 \leq F \leq 1/2$ , so steigen *Kegel- und Zylinderkurve von unten links nach oben rechts an*<sup>10</sup>. Infolgedessen wird durch die vom Punkte  $B$  erzeugte Kurve  $c(B)$ , welche sich ebenso verhält, *das Bild nach unten unscharf abgegrenzt*, während die durch alle übrigen Punkte erzeugten Kurven nichts Neues liefern<sup>11</sup>.

$\gamma)$  Im Intervall  $1/2 \leq F \leq F_s$  steigt die *Kegelkurve von links oben nach rechts unten ab*, und zwar ist der Anfangspunkt ein Scheitel bezüglich der  $x$ -Achse, der Endpunkt ein Scheitel bezüglich der  $z$ -Achse. *In diesem Intervall berandet also die Kegelkurve das Bild nach innen*<sup>12</sup>.

$\delta)$  Im restlichen Intervall  $F_s \leq F < \infty$  steigt die *Kegelkurve weiter ab*, und zwar von *rechts nach links*, um schliesslich im Bildpunkt der Kreisscheibe,  $K$ , zu münden. Bei dieser Sachlage wird nun die vom Punkte  $D$  beschriebene Kurve  $c(D)$  massgebend. Sie verläuft gleich wie die Kegelkurve und liegt demnach mit Ausnahme von  $K$  ganz rechts der Senkrechten durch  $K$ . *Sie übernimmt die Rolle der inneren unscharfen Bildberandung*<sup>13</sup>.

Nun ergibt schon eine oberflächliche Prüfung, dass sich die Kurven  $c(B)$  und  $c(D)$  innerhalb der Kegelkurve schneiden (Abb. 2). *Das gewonnene Randsystem ist also leider nur unscharf*<sup>14</sup>.

<sup>10</sup> Vgl. hierzu: H. BIERI, Seminario Matematico de Barcelona 8, 171 (1955). Die beiden Kurven werden dort diskutiert und auch im Bild wiedergegeben.

<sup>11</sup> Die Gerade  $z = x$  (Kappenkörperkurve) und die Bildkurve der symmetrischen Kugelschichten sind als äussere Randstücke bekannt. Bezuglich der letztern vgl. H. HADWIGER, Portug. math. 7, 73 (1948).

<sup>12</sup> In der Teilmenge der konvexen Rotationskörper mit einem  $F$  aus dem angegebenen Intervall sind also die Kegel extremal. Vgl. auch: H. BIERI, Beiträge zum Hauptproblem der konvexen Körper, Sitzungsberichte der Math. Vereinigung (Bern 1952).

<sup>13</sup> Dieser Umstand gestattet die Aussage, dass eine Teilmenge der oben angegebenen Kegel extremal bleibt im erweiterten Intervall  $\pi/2 \leq F < \infty$ .

<sup>14</sup> Alle genannten Kurven sind explizit anschreibbar und auch diskutierbar. Die genaue Berechnung lohnt sich aber nicht.

B. Bei festem Äquatorradius hat HADWIGER vollständige Resultate erhalten. Sie lassen sich unter Einführung des Rundungsmassen  $\mu = 4\pi/F$  folgendermassen ausdrücken<sup>15</sup>:

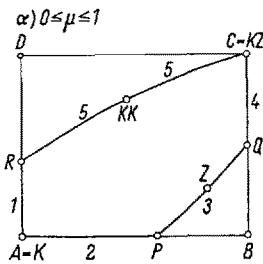


Abb. 3.  $K$  Bildpunkt des Kegels.  $Z$  Bildpunkt des Zylinders.  $KZ$  Bildpunkt des Kugelzylinders.  $KK$  Bildpunkt des Kappenkörpers der Kugel. — Bahnkurve von  $P$ .

Wegen des Absteigens der Kegelkurve kann also auch hier, wenngleich in einem kleineren Intervall, die unter A. erwähnte Randeigenschaft der Kegelkurve festgestellt werden<sup>17</sup>.

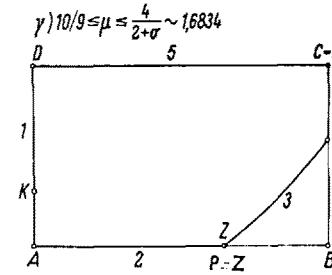


Abb. 5.  
1: Wie unter  $\alpha$ ).  
3: Wie unter  $\alpha$ ).  
4: Wie unter  $\beta$ ).  
5: Wie unter  $\beta$ ).

Gleichheitszeichen für den Zylinder.

$$2: z \geq \frac{9\mu(2-\mu)^2}{16}$$

Gleichheitszeichen für den Kegel.

Gleichheitszeichen für den Kegel.

Gleichheitszeichen für den Zylinder.

Gleichheitszeichen für den Kugelzylinder.

Gleichheitszeichen für Kappenkörper des Kugelzylinders.

$$\begin{aligned} 1: x &\geq \frac{16\mu}{\left[\mu\{\pi - \arccos\left(\frac{\mu}{4-\mu}\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{2-\mu}\}\right]^2} \\ 2: z &\geq \frac{\mu(2-\mu)}{2} \\ 3: z &\geq 9\mu \left[1 + \frac{\pi-2}{4}\mu - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{x}}\right]^2 \\ 4: x &\leq \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \\ 5: z &\leq \mu \left[2 - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{x}}\right]^2 \end{aligned}$$

Der wichtigste Fortschritt besteht darin, dass man die Bahnkurve des Punktes  $B$  durch diejenige des Punktes  $P$  ersetzen darf. In der Tat lässt sich zeigen, dass das Kurvenstück  $\widehat{PQ}$  mit Ausnahme von  $P$  ganz oberhalb der Bahnkurve von  $P$  verläuft<sup>16</sup>. Infolgedessen wird das Bild durch die letztgenannte Kurve nach unten abgegrenzt. Die Koordinaten von  $P$  berechnet man zu

<sup>15</sup> H. HADWIGER, Math. Nachr. 2, 114 (1949); Math. Ann. 122, 175 (1950); Abh. math. Sem. Hamburg. Univ. 18, 38 (1952); Math. Nachr. 13, 19 (1955); Math. Nachr. 14, 377 (1956); El. Math. 12, 101 (1957).

<sup>16</sup> Als Enveloppe der Bogen  $\widehat{PQ}$  (Abb. 3) resultiert eine Kurve mit der Gleichung

$$x = \frac{64\mu}{[4+3(\pi-2)\mu]^2}; \quad z = \frac{9}{64}\mu[4-(\pi-2)\mu]^2.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{144\mu}{[12+3(\pi-2)\mu-2\sqrt{2}\sqrt{2-\mu}]^2}; & z &= \frac{\mu(2-\mu)}{2} \\ \text{oder mit } \mu &= 2-v^2: & \sqrt{2} &\geq v \geq 1 \\ x &= \frac{144(2-v^2)}{[6\pi-2\sqrt{2}\cdot v-3(\pi-2)v^2]^2}; & z &= \frac{v^2(2-v^2)}{2} \end{aligned}$$

Beide Koordinaten wachsen monoton mit  $\mu$ .

$$\beta 1 \leq \mu \leq 10/9$$

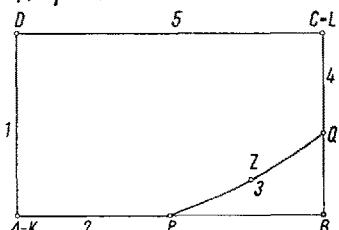


Abb. 4.

$L$  Bildpunkt der symmetrischen Kugellinse.  
1: Wie unter  $\alpha$ ).  
2: Wie unter  $\alpha$ ).  
3: Wie unter  $\alpha$ ).

Dieselbe ist im Intervall  $0 \leq \mu \leq 1$  von unten konvex, mündet in 0 mit der Steigung  $9/16$  und weist außerdem für

$$\mu = \frac{4}{3(\pi-2)} > 1$$

eine Spitze auf. Die Bahnkurve von  $P$  besitzt in 0 die Steigung  $4/9 < 9/16$ , weshalb es leicht ist, zu zeigen, dass die Enveloppe im zulässigen Intervall mit Ausnahme von 0 ganz oberhalb der letzten genannten Kurve liegt. Ferner wird wegen

$$\frac{9\mu}{16}[2-(4-\pi)\mu]^2 < \frac{9\mu}{64}[4-(\pi-2)\mu]^2$$

für  $0 < \mu \leq 1$  der Punkt  $Q$  vor dem Berührungs punkt mit der Enveloppe durchlaufen. Damit ist die Behauptung des Textes bewiesen.

<sup>17</sup> H. HADWIGER und H. BIERT, Math. Nachr. 13, 22 (1955). Es ist  $\sigma = \vartheta - 2$ .

Gleichheitszeichen für die symmetrische Kugellinse.

Gleichheitszeichen für die symmetrische Kugellinse.

$$\begin{aligned} 4: x &\leq \frac{4}{[2\sqrt{2-\mu} + \sqrt{\mu} \cdot \arccos \sqrt{\mu}(2-\mu)]^2} \\ 5: z &\leq \frac{(\mu+1)^2(2-\mu)}{4} \end{aligned}$$

In diesem Intervall kommt neuerdings die Bahnkurve von  $A$  zur Geltung. Man beachte, dass jetzt der Bildpunkt des Kegels oberhalb von  $A$  liegt. Infolgedessen verläuft die Kurve  $c(A)$  unterhalb der absteigenden Kegelkurve, was natürlich ungünstig ist.

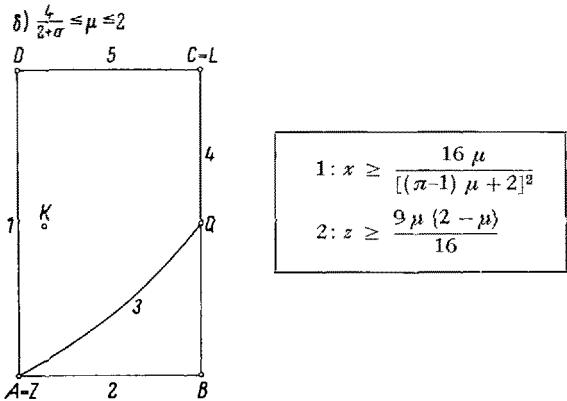


Abb. 6.

3: Wie unter  $\alpha$ ). 4: Wie unter  $\beta$ ). 5: Wie unter  $\gamma$ .

Weil die Zylinderkurve von rechts oben in  $K$  einmündet, ist diesmal die Bahnkurve von  $D$  ausschlaggebend. Ihre Koordinaten lauten:

$$x = \frac{16\mu}{[(\pi-1)\mu+2]^2}; \quad z = \frac{(\mu+1)^2(2-\mu)}{4}. \quad (4)$$

Gegenüber der Variante  $A$  sind zwei Verbesserungen, leider aber auch eine Verschlechterung erzielt worden. Diese letztere hat zur Folge, dass auch diesmal kein Stück des scharfen Randes freigelegt werden kann (Abb. 7).

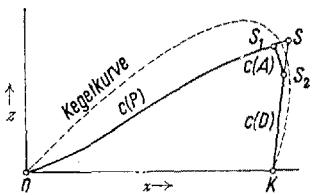


Abb. 7.

C. Nun legen wir die beiden Randsysteme zusammen. Offensichtlich ist es gestattet, überall die besseren Stücke zu wählen, und so erreichen wir schliesslich unser Ziel, ein wenn auch kleines Stück des exakten Randes freizulegen (Abb. 8).

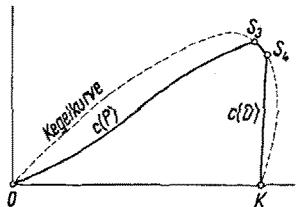


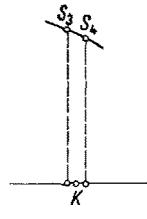
Abb. 8.

Die Bahnkurven von  $P$  und  $D$  schneiden nämlich die Kegelkurve in den Punkten  $S_3$  und  $S_4$ <sup>18</sup>, und der Bogen

<sup>18</sup> Dass die Schnittpunkte  $S_3$ ,  $T$ ,  $S_4$  so liegen, wie es Abb. 8 und 9 zeigen, kann rechnerisch mit absoluter Sicherheit nachgewiesen werden unter Benützung von (3) und (4) sowie unter Ausnützung der bekannten Eigenschaften der Kegelkurve.

$S_3 S_4$  der Kegelkurve berandet das Bild nach innen, und zwar scharf.

Unter Ausnützung der Ähnlichkeitsinvarianz von  $x, z$  lesen wir aus den Abbildungen 8, 9 folgende Extremeigenschaft der Kegel ab:



Gleichheitszeichen für den Zylinder.

Gleichheitszeichen für den Zylinder.

Abb. 9.

Unter allen konvexen Rotationskörpern besitzen bei vorgegebenem  $x$  gewisse Kegel<sup>19</sup> im Teilintervall  $x(S_3) \leq x < 8/\pi^2$  ein absolutes, im Teilintervall  $8/\pi^2 \leq x \leq x(S_4)$  noch ein relatives Minimum von  $z$ .

Dies ist äquivalent mit der Aussage: Unter allen konvexen Rotationskörpern besitzen bei vorgegebener Oberfläche  $F$  und ebensolchem Integral der mittleren Krümmung  $M$  gewisse Kegel im Intervall  $x(S_3) \leq x < 8/\pi^2$  ein absolutes<sup>20</sup>, im Restintervall  $8/\pi^2 \leq x \leq x(S_4)$  noch ein relatives Minimum des Volumens  $V$ .

### Summary

The main problem of the theory of convex bodies of revolution can be stated as follows:

By means of two of the three affinely invariant functions

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}, \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}, \quad z = \frac{36\pi V^2}{F^3},$$

the set of all convex bodies of revolution is mapped into a plane. The boundary of the image-set is to be determined. Part of this boundary is already known. The corresponding extremal bodies are cap-bodies of the sphere and symmetric spherical discs.

The present note is concerned with yet another, if small subset of the boundary. The corresponding extremal bodies turn out to be cones, whose angles of aperture  $\psi$  vary between well-defined limits  $\psi_1$  and  $\psi_2 > \psi_1$ .  $F$  and  $M$  being given, these cones assume for  $\psi_1 \leq \psi \leq \psi^*$  and for  $\psi^* \leq \psi \leq \psi_2$  a relative and an absolute minimum, respectively.

<sup>19</sup> H. HADWIGER und H. BIERI, Math. Nachr. 13, 19 (1955). Die Sprungstelle des absoluten Minimums von  $V$  ist jetzt genau lokalisiert.

<sup>20</sup> Die Kegelkurve behält vermutlich ihre Randeigenschaft nach links bis zu ihrem Scheitel bezüglich der  $x$ -Achse und auch noch weiter nach rechts. Ferner wird vermutet, dass links dieses Scheitels der untere Bildrand durch die Bildkurve gewisser Kegelstümpfe und anschliessend bis 0 durch die Zylinderkurve geliefert wird. In der Umgebung von  $K$  liegen die Dinge komplizierter. Es bildet sich ein relatives Maximum des Volumens aus. HADWIGER bezeichnete als mutmassliche Extremalkörper *symmetrische Kappenkörper* von *symmetrischen Kugellinsen*. Aus dieser zweiparametrischen Schar müssten dann die richtigen Körper durch Enveloppenbildung ermittelt werden.